

# ESTIMACIÓN DEL APROVECHAMIENTO MÁXIMO SOSTENIBLE Y DISTRIBUCIÓN DIAMÉTRICA ESTABLE DE MASAS IRREGULARES DE *Pinus nigra* MEDIANTE MODELOS MATRICIALES

IGNACIO LÓPEZ TORRES, SIGFREDO FRANCISCO ORTUÑO PÉREZ, ÁNGEL JULIÁN MARTÍN FERNÁNDEZ y CARMEN FULLANA BELDA

## RESUMEN

Se presenta un modelo matricial de proyección para cuantificar las tasas máximas de aprovechamiento que aseguren la sostenibilidad y la estabilidad de las distribuciones diamétricas de tres calidades de *Pinus nigra*. Considerando períodos de proyección de 10 años, los pies han sido agrupados en cinco clases diamétricas: 0-10, 10-20, 20-30, 30-40 y >40cm. Las probabilidades de transición se calcularon ajustando una aproximación por esplines cúbicos a las curvas de crecimiento diamétrico y asumiendo distribuciones uniformes para los diámetros dentro de cada clase. Se plantea una condición para la gestión sostenible

de la masa, que además permite alcanzar y mantener en el tiempo una distribución diamétrica estable. Los resultados obtenidos indican que, para asegurar la sostenibilidad/estabilidad de la población, y para cada intervalo de proyección, las tasas máximas de extracción deberían estar entre el 17,21 y 40,09%, dependiendo del nivel de calidad, para reclutamientos comprendidos entre 200 y 840 pies/ha y áreas basimétricas comprendidas entre 20 y 30m<sup>2</sup>·ha<sup>-1</sup>. Finalmente, se obtienen para cada nivel de calidad las distribuciones diamétricas estables en relación al reclutamiento para áreas basimétricas de 20, 25 y 30m<sup>2</sup>·ha<sup>-1</sup>.

Los modelos matriciales de proyección, introducidos por Leslie (1945) y modificados por Lefkovich (1965), agrupando los datos por estados en lugar de categorías de edad, han sido extensamente aplicados para analizar la evolución, gestión, aprovechamiento, etc. de masas arbóreas (Zuidema 2000, 2006; Caswell, 2001; Van Mantgem y Stephenson, 2005; López *et al.*, 2007). Estos modelos están definidos por el sistema en diferencias finitas  $N(t+1) = A N(t)$ , donde  $N(t)$  y  $N(t+1)$  son vectores columna cuyos componentes son el número de pies/ha dentro de cada clase diamétrica en los instantes  $t$  y  $t+1$ , respectivamente, y  $A$  es una matriz primitiva que contiene probabilidades de transición entre clases de edad adyacentes y reclutamientos.

La tasa de crecimiento de la población es el autovalor dominante

$\lambda_0$  de la matriz  $A$  y, por análisis asintótico (comportamiento a largo plazo), se sabe que cuando  $\lambda_0 > 1$  el número total de pies/ha de la población de árboles aumenta exponencialmente en el tiempo, a no ser que se acometan los correspondientes aprovechamientos; cuando  $\lambda_0 < 1$  la población decrece tendiendo a la extinción; y cuando  $\lambda_0 = 1$  se obtiene una distribución diamétrica estable en el tiempo, que es proporcional a  $W_0$ , autovector por la derecha de  $A$ , asociado al autovalor dominante  $\lambda_0$ .

De acuerdo con Sterba (2004) hay principalmente dos tipos de distribuciones diamétricas consideradas estables en la literatura forestal. La primera es la distribución semilogarítmica de De Liocourt (1898), que presenta las extensiones de Susmel (1956) y de Cancino y Von Gadow (2002). Mediante la segunda,

dada por Schütz (1975), se ha probado que una distribución diamétrica estable no tiene porqué ser necesariamente semilogarítmica, sino que ha de cumplir la condición de que, para cada clase diamétrica, el número de árboles entrantes de la clase inferior es igual al número de árboles que se dejan crecer hacia la siguiente clase diamétrica (superior) más el número de árboles extraídos (incluyendo mortandades naturales). En general, el concepto de estabilidad está estrechamente asociado al concepto de perturbación: un sistema se considera estable si siempre retorna a una posición de referencia (equilibrio) después de pequeñas perturbaciones; en otro caso, se dice que el sistema es inestable. En estas condiciones, diremos que la distribución diamétrica es estable si permanece inalterable en el tiempo en tamaño y estructura, es decir, si el número de pies/ha dentro de cada clase di-

**PALABRAS CLAVE / Aprovechamiento Sostenible / Área Basimétrica / Autovalor Dominante / Población Estable / Reclutamiento /**

Recibido: 28/02/2008. Modificado: 03/09/2008. Aceptado: 05/09/2008.

**Ignacio López Torres.** Ingeniero Naval, Universidad Politécnica de Madrid (UPM), España. Profesor UPM, España. Dirección: ETSI de Montes. Ciudad Universitaria, s/n. 28040 Madrid, España. e-mail: i.lopez@upm.es

**Sigfredo Francisco Ortuño Pérez.** Doctor Ingeniero de Montes, UPM, España. Profesor, UPM, España.

**Ángel Julián Martín Fernández.** Doctor Ingeniero de Montes, UPM, España. Profesor, UPM, España.

**Carmen Fullana Belda.** Doctora y Profesora en Ciencias Económicas y Empresariales, Universidad Pontificia de Comillas de Madrid, España.

amétrica permanece constante en cada unidad de paso del tiempo. Estas distribuciones estables dependen estrechamente del reclutamiento, extracción y movimiento de pies a lo largo de las clases diamétricas en el tiempo (Schütz, 2006).

El objetivo principal de este trabajo es estimar el aprovechamiento máximo sostenible a largo plazo y la obtención de las distribuciones diamétricas estables para masas irregulares de *Pinus nigra* Arnold, utilizando modelos matriciales de proyección.

## Área de Estudio y Datos

*Pinus nigra* es una especie forestal importante en Europa, principalmente en el sur, y en el norte de África (Mirov, 1967). En España, según datos del Segundo Inventario Forestal Nacional 1986-1995 (ICONA, 1995) *P. nigra* ocupa una superficie de 1411514,08ha, de las cuales 405982,54ha son masas puras, y el resto mezclas con otras especies, principalmente *P. sylvestris*, *P. halepensis* y *P. pinaster*. El Sistema Ibérico, una sierra de forma triangular que se extiende a lo largo de más de 400km desde Burgos a Alicante, en dirección NO-SE, ganando anchura y perdiendo altitud mientras se acerca al mar, concentra el 60% del área ocupada por *P. nigra* en España, principalmente en las provincias de Cuenca, Guadalajara y Teruel (Grande *et al.*, 2004).

Se tomaron datos de las tablas de crecimiento y producción de *P. nigra* Arnold ssp. *salzmannii* var. Hispánica para el Sistema Ibérico (Gómez Loranca, 1996) para construir un modelo matricial de proyección que permita estimar el aprovechamiento máximo sostenible y la distribución diamétrica estable de estas masas irregulares. Para construir dichas tablas se obtuvieron datos medios de una red de 67 parcelas experimentales con una superficie de 1000-2500m<sup>2</sup>, inventariadas cada 5 años durante un período de 30 años, relativos a pies/ha y su distribución diamétrica, altura media y dominante, área basimétrica (definida como la superficie, en m<sup>2</sup>·ha<sup>-1</sup>, de las secciones de los troncos de todos los pies de la parcela a 1,4m sobre el suelo o altura del pecho), volumen y crecimiento diamétrico.

Estos datos fueron clasificados según el nivel de crecimiento diamétrico en cinco calidades, I a V, de las cuales se han extraído para estos modelos las tres primeras, I (crecimiento diamétrico rápido, 5 parcelas), II (crecimiento diamétrico medio, 16 parcelas) y III (crecimiento diamétrico lento, 25 parcelas), siendo las calidades IV y V menos viables comercialmente. Por tanto, se considerará la gestión de estos tres tipos de masas irregulares puras de *P. nigra* de calidades I a III, para cada una de las cuales

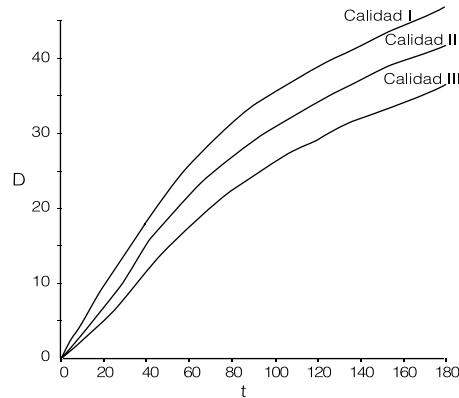


Figura 1. Curvas de crecimiento diamétrico para cada calidad (diámetro D en cm y tiempo t en años).

se muestra en la Figura 1 la evolución del diámetro del tronco a lo largo de los 180 años del estudio (Gómez Loranca, 1996). Las densidades de los rodales a estudiar, se definen más adelante.

## Materiales y Métodos

### El modelo

El modelo está definido por una matriz de transición entre clases diamétricas entre los instantes t y t+1, y ya ha sido aplicado previamente para la especie *Fagus sylvatica* L. en los hayedos navarros (López *et al.*, 2007). Debido a que las intervenciones para el área de estudio en general tienen lugar cada 10 años, se ha adoptado este período como unidad de salto para las proyecciones. En cuanto a la amplitud de las clases diamétricas, dado que el autovalor dominante de las matrices de proyección correspondiente a especies arbóreas de crecimiento lento se ve, en general, poco influenciado por ligeras o incluso moderadas variaciones en dicha amplitud (Ramula y Lehtilä, 2005; Zuidema, 2006; López Torres *et al.*, 2008), se ha considerado en el modelo cinco clases diamétricas de amplitud 10cm: (0-10), (10-20), (20-30), (30-40) y >40cm, de modo tal que en el intervalo de proyección (t, t+1), un árbol de la clase i puede o bien permanecer en esa clase i, o bien progresar a la clase (i+1), pero otras transiciones no son posibles. El número de árboles en cada clase cambia en cada intervalo de proyección debido a que unos son cortados, otros permanecen en la misma clase diamétrica y otros crecen y superan el límite, pasando a la siguiente clase.

En estas condiciones, sea  $p_i$  la probabilidad de que un árbol que en el instante inicial de proyección t se encuentra en la clase i evolucione durante el período de proyección a la clase (i+1);  $r_i$  los coeficientes de reclutamiento es decir, el número

de descendientes vivos (pies/ha) en el instante t+1 de proyección que fueron producidos durante el intervalo (t, t+1) por cada árbol de la clase i en el instante inicial t de tiempo;  $h_i$  la proporción de árboles extraídos de la clase i; y  $N_i(t)$  y  $N_i(t+1)$ , respectivamente, el número de pies/ha en la clase i en el momento inicial y final de la proyección. Analizando la dinámica de las proyecciones, puede verse fácilmente que el modelo queda definido por el sistema en diferencias finitas lineal homogéneo

$$N(t+1) = A(I-H) N(t), \quad (1)$$

donde

$$A = \begin{pmatrix} 1-p_1 & r_2 & r_3 & r_4 & r_5 \\ p_1 & 1-p_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p_2 & 1-p_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p_3 & 1-p_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p_4 & 1 \end{pmatrix}$$

es la matriz de transición; I es la matriz identidad;  $H = \text{diag}(h_1, h_2, h_3, h_4, h_5)$  es una matriz diagonal con las tasas de extracción (aprovechamiento), incluyendo las mortandades naturales; y  $N(t)$  y  $N(t+1)$  son vectores columna conteniendo, respectivamente, el número de pies/ha en cada clase diamétrica en los instantes inicial y final de proyección.

Es conocido (Perron, 1907; Frobenius, 1908; Cohen, 1979) que cuando una matriz no negativa, como las matrices de proyección A (sin contemplar aprovechamiento) o  $A(I-H)$  (contemplando aprovechamiento) es primitiva, la población se comporta de manera asintótica, tendiendo a una distribución diamétrica definida por el autovector por la derecha correspondiente al autovalor dominante de dicha matriz, independientemente de cuál sea la población inicial.

Las hipótesis de partida para el modelo son: a) el bosque se encuentra en un estado de equilibrio; b) las curvas de crecimiento diamétrico para cada calidad I a III a lo largo de los 180 años del estudio, son las definidas por la Figura 1 (Gómez Loranca, 1996); c) la distribución de probabilidad para el diámetro del tronco, dentro de cada clase diamétrica, es la uniforme (rectangular); d) las operaciones de corte se realizan al principio de cada intervalo de proyección siguiendo el método de selección (si estas operaciones se realizan al final, entonces el modelo sería  $N(t+1) = (I-H) A N(t)$ ).

Los cálculos fueron realizados con el software Maple versión 11.0 (Maple, 2007).

### Estimación de los parámetros del modelo

Para estimar las probabilidades de transición  $p_i$  entre cada par consecutivo de clases diamétricas, para intervalos de 10 años, se utilizó una aproximación por

esplines cúbicos, en el intervalo de 0-180 años, a los datos de la antes mencionada Figura 1, que contenían las curvas de crecimiento diamétrico. Mediante esta aproximación, y para cada nivel de calidad, se determinó el diámetro al final de cada proyección de 10 años para árboles que tenían 0, 10, 20, 30 o 40cm de diámetro al principio. Así, teniendo en cuenta la hipótesis c, es fácil ver que la probabilidad de transición de la clase i a la clase (i+1), es decir, entre los intervalos (10(i-1), 10i) y (10i, 10(i+1)), está dada por

$$p_i = (D_i - 10i) / (D_i - D_{i-1}), \text{ para } i = 1, 2, 3, 4$$

donde  $D_i$ , para  $i=0,1,2,3,4$ , es el diámetro de proyección de un árbol con diámetro inicial igual a  $10i$ . Estos cálculos han sido resumidos en las Tablas I y II.

En cuanto al reclutamiento, dado que esta especie es intolerante a la sombra, depende esencialmente de la radiación solar a nivel del suelo y consecuentemente de los "huecos" en la cubierta vegetal. De ahí que los factores clave que facilitan la germinación y el crecimiento en la primera etapa de desarrollo sean: 1) La competencia por la luz, que puede ser regulada mediante el tamaño de los huecos generados tras las extracciones, que inducen la regeneración y facilitan el establecimiento; se ha demostrado, en relación a especies con intolerancia a la sombra (Minckler y Woerheide, 1965) que generalmente es suficiente abrir huecos de tamaño 1,5 a 2 veces la altura de los árboles circundantes para facilitar la regeneración. 2) La capacidad reproductiva en cuanto a cantidad y viabilidad de la semilla que viene de los árboles circundantes; estudios anteriores (Tiscar, 2004) asignan a *Pinus nigra* una longevidad de 500-600 años, aunque en España figuren inventariados árboles de hasta 900 años, a lo largo de los cuales no se produjo reducción apreciable de su capacidad reproductiva.

TABLA I  
PROYECCIONES A 10 AÑOS DE LOS DIÁMETROS PARA CALCULAR LAS PROBABILIDADES DE TRANSICIÓN

	Diámetro (cm)	
	Inicial	Proyectado a 10 años
Calidad I	0	4,771604
	10	14,428186
	20	23,934621
	30	32,399611
	40	41,280281
Calidad II	0	3,260045
	10	14,312221
	20	22,971059
	30	31,853005
	40	41,106367
Calidad III	0	2,355628
	10	13,372357
	20	22,23
	30	31,341548
	40	41,099995

Resumiendo los estudios para esta especie en relación al reclutamiento global (natural) definido como

$$R = r_2N_2 + r_3N_3 + r_4N_4 + r_5N_5 = \sum_{i=2}^5 r_i N_i$$

éste ha sido cuantificado en los términos siguientes: a) entre 160 y 350 pies en la clase diamétrica 4-8cm, para parcelas de 600m<sup>2</sup> (Schütz, 1989); b) según el Segundo Inventario Forestal Nacional 1986-1995 (ICONA, 1995), entre 501 y 2000 pies/ha se considera que el reclutamiento es normal (en España); c) incluso en esta primera fase de crecimiento de los pies, los cinco patrones de crecimiento correspondientes a las calidades I a V del estudio de Gómez Loranca (1996) parecen reproducirse, produciéndose una unión entre las correspondientes curvas de crecimiento (Serrada *et al.*, 1994); d) cuando se alcanza el equilibrio (distribución diamétrica estable), cada par (R, G), donde G representa el área basimétrica de la parcela, define la tasa de crecimiento de la población  $\lambda_0$  (López *et al.*, 2007); y e) el área basimétrica óptima para iniciar y mantener una regeneración natural de las parcelas se halla entre 20 y 30m<sup>2</sup>·ha<sup>-1</sup> (Schütz, 1989; Serrada *et al.*, 1994; Monge, 1997).

#### Estrategia de gestión

Como puede verse en la Ec. 1, las extracciones inducen una perturbación en el modelo de crecimiento natural de los árboles, que es

$$N(t+1) = A N(t) \quad (2)$$

modificando la matriz de transición A, correspondiente al crecimiento natural, hacia la matriz de transición A(I-H), en la que ya se tiene en cuenta el aprovechamiento. Así, si las matrices A y A(I-H) son primitivas, y siempre que el autovalor dominante de la matriz A sea  $\lambda_0 > 1$ , se pueden determinar las tasas de aprovechamiento máximo sostenible en el tiempo de modo tal que el autovalor dominante de la matriz A(I-H) sea  $\lambda = 1$ .

Hay, desde luego, muchas estrategias de aprovechamiento diferentes que conducen a esta condición, y muchas otras incapaces de hacerlo. Algunas, que focalizan las extracciones en la última clase diamétrica

ca, están condicionadas por la aparición de enfermedades ligadas a la edad del árbol, cuya prevalencia en general aumenta con la edad. La estrategia de gestión que reside en este modelo está basada en la siguiente condición C3, que conduce a alcanzar en cada intervención la distribución diamétrica estable. La condición C3, junto con las condiciones C1 y C2, definen la estrategia de aprovechamiento para el modelo, y se formulan (López *et al.*, 2007) de la siguiente manera:

C1. Una condición necesaria para realizar las operaciones de aprovechamiento es  $\lambda_0 > 1$ . Dado que las mortandades naturales no están incluidas en la matriz A, esta condición ha de ser interpretada con suficiente holgura.

C2. Por motivos de sostenibilidad, el autovalor dominante  $\lambda$  de la matriz A(I-H) debe ser  $\lambda = 1$ .

C3. Cada aprovechamiento debe conducir a la distribución diamétrica estable de la masa, definida por el autovector por la derecha  $W_0$  correspondiente al autovalor dominante  $\lambda_0$  de la matriz A.

Así, resolviendo  $AW_0 = \lambda_0 W_0$ , se obtiene el vector

$$W_0 = ((\lambda_0 - 1)(\lambda_0 - 1 + p_2)(\lambda_0 - 1 + p_3)(\lambda_0 - 1 + p_4), p_1(\lambda_0 - 1)(\lambda_0 - 1 + p_3)(\lambda_0 - 1 + p_4), p_1 p_2 (\lambda_0 - 1)(\lambda_0 - 1 + p_4), p_1 p_2 p_3 (\lambda_0 - 1), p_1 p_2 p_3 p_4) \quad (3)$$

que define la distribución diamétrica estable y, por consiguiente, la dinámica a largo plazo de la población sin aprovechamiento. Por otra parte, asumiendo la condición C1, las condiciones C2 y C3 pueden ser reescritas mediante el sistema lineal  $AHW_0 = (\lambda_0 - 1)W_0$ . Resolviendo este sistema lineal, se obtienen dichas tasas de aprovechamiento máximo sostenible, que además consiguen que en cada intervención se alcance la distribución diamétrica estable, resultando

$$h_1 = h_2 = h_3 = h_4 = h_5 = h = \frac{\lambda_0 - 1}{\lambda_0} \quad (4)$$

Finalmente, sustituyendo la Ec. 4 en la matriz H, se verifica que

$$A(I-H) = (1-h)A = (I-H)A \quad (5)$$

lo cual significa que si se cumplen las condiciones C2 y C3, tanto si las operaciones de extracción se desarrollan al

TABLA II  
PROBABILIDADES DE TRANSICIÓN ENTRE CLASES DIAMÉTRICAS ADYACENTES

Clases diamétricas (cm)	Calidad I	Calidad II	Calidad III
(0-10) → (10-20)	$P_1 = 0,458567$	$P_1 = 0,390169$	$P_1 = 0,306112$
(10-20) → (20-30)	$P_2 = 0,413890$	$P_2 = 0,343124$	$P_2 = 0,257627$
(20-30) → (30-40)	$P_3 = 0,283475$	$P_3 = 0,208626$	$P_3 = 0,148376$
(30-40) → (>40)	$P_4 = 0,144165$	$P_4 = 0,119564$	$P_4 = 0,112722$

principio de cada período como al final, se obtienen los mismos resultados.

### Distribuciones diamétricas estables

Para este modelo matricial de proyección, como se estableció anteriormente, la distribución diamétrica estable está definida por el autovector por la derecha  $W_0$  de la matriz de proyección  $A$ . Por tanto, es independiente de la estrategia de aprovechamiento puesta en práctica, definida por las condiciones C1 a C3. Para obtener  $W_0$ , se observa en la Ec. 3 que los componentes ( $N_1, N_2, N_3, N_4, N_5$ ) de  $W_0$  verifican

$$N_{i+1} = \frac{P_i}{\lambda_0 - 1 + p_{i+1}} N_i = l_i N_i \quad \text{para } i=1,2,3$$

$$\text{y } N_5 = \frac{P_4}{\lambda_0 - 1} N_4 = l_4 N_4 \quad (6)$$

$$\text{donde } l_i = \frac{P_i}{\lambda_0 - 1 + p_{i+1}} \quad \text{para } i=1,2,3$$

$$\text{y } l_4 = \frac{P_4}{\lambda_0 - 1}$$

Substituyendo el valor de  $N_i$  (para  $i=1,2,3$ ) obtenido con la Ec. 6 en la ecuación del área basimétrica de la masa ( $G$ ), se obtiene

$$G = \frac{\pi N_1}{4} (D_1^2 + D_2^2 l_1 + D_3^2 l_1 l_2 + D_4^2 l_1 l_2 l_3 + D_5^2 l_1 l_2 l_3 l_4) \quad (7)$$

Pero, en la situación de estabilidad  $N(t+1) = \lambda_0 N(t)$ , lo cual para la primera componente supone que

$$(1-p_1)N_1 + \sum_{i=2}^5 r_i N_i = (1-p_1)N_1 + R = \lambda_0 N_1 \quad (8)$$

donde  $R = r_2 N_2 + r_3 N_3 + r_4 N_4 + r_5 N_5$  es el reclutamiento.

Resolviendo la Ec. 8 en términos de  $N_1$  llegamos a

$$N_1 = \frac{R}{\lambda_0 - 1 + p_1} \quad (9)$$

y substituyendo  $N_1$  en la Ec. 7, finalmente se obtiene la ecuación siguiente (López *et al.*, 2007):

$$G = \frac{\pi R}{4(\lambda_0 - 1 + p_1)} (D_1^2 + D_2^2 l_1 + D_3^2 l_1 l_2 + D_4^2 l_1 l_2 l_3 + D_5^2 l_1 l_2 l_3 l_4) \quad (10)$$

La Ec. 10 define una superficie que relaciona  $\lambda_0$ ,  $R$  y  $G$ , y muestra que, para cada par ( $R, G$ ) hay solo una distribución diamétrica estable. Para obtenerla, se requiere definir cuál es el área basimétrica óptima para la gestión de masas irregulares de *P. nigra*. A este respecto, como ha sido visto (Schütz, 1989; Serrada *et al.*, 1994; Monge, 1997), el área basimétrica

óptima para iniciar y mantener una regeneración natural de las parcelas se halla entre 20 y 30m<sup>2</sup>·ha<sup>-1</sup>. Por tanto, en los cálculos relativos a las distribuciones diamétricas estables se consideran tres niveles de área basimétrica  $G = 20, 25$  y 30m<sup>2</sup>·ha<sup>-1</sup>. Así, substituyendo ordenadamente estos valores de  $G$  en la Ec. 10, se obtienen ecuaciones que relacionan  $R$  con  $\lambda_0$  en cada uno de los casos, lo que permite calcular, para cada  $R$ , un valor (real) de  $\lambda_0$ . Finalmente, substituyendo  $\lambda_0$  y las probabilidades de transición en las Ecs. 9 y 6, se obtiene la distribución diamétrica estable correspondiente para cada nivel de reclutamiento  $R$ .

### Resultados

Substituyendo ordenadamente  $G = 20, 25$  y 30m<sup>2</sup>/ha y las probabilidades de transición calculadas (Tabla II) con la Ec. 10, se pueden obtener las curvas  $\lambda_0 = f(R)$  que relacionan el reclutamiento  $R$  con el autovvalor dominante  $\lambda_0$  de la matriz de transición  $A$  para cada nivel de calidad y dichos niveles de área basimétrica. En particular, se muestran dichas curvas en la Figura 2a para el caso central  $G = 25$ m<sup>2</sup>/ha, y valores numéricos para esta relación para los casos  $G = 20, 25$  y 30m<sup>2</sup>/ha y reclutamientos  $R = 200, 520$  y 840pies/ha, se presentan (redondeados) en la Tabla III.

Por otra parte, de la Ec. 4 se desprende que  $\lambda_0 = \frac{1}{1-h}$ . Substituyendo en la Ec.

10 obtenemos las curvas  $h = f(R)$  que relacionan el reclutamiento  $R$  con la tasa de aprovechamiento máximo "sostenible/estable"  $h$  para cada nivel de calidad y tres niveles de área basimétrica  $G = 20, 25$  y 30m<sup>2</sup>·ha<sup>-1</sup>. En particular, se muestran dichas curvas en la Figura 2b para el caso central  $G = 25$ m<sup>2</sup>·ha<sup>-1</sup>, y se presentan valores numéricos (redondeados) para esta relación en la Tabla III, para los casos  $G = 20, 25$  y 30m<sup>2</sup>·ha<sup>-1</sup> y reclutamientos  $R = 200, 520$  y 840pies/ha.

Finalmente, las distribuciones diamétricas estables en relación con el reclutamiento, para cada nivel de calidad y área basimétrica  $G = 25$ m<sup>2</sup>·ha<sup>-1</sup>, se muestran en las Figuras 3a, b y c. Valores numéricos de estas distribuciones se pueden ver (redondeados) en la Tabla III, para los casos de  $G = 20, 25$  y 30m<sup>2</sup>·ha<sup>-1</sup> y de reclutamientos  $R = 200, 520$  y 840pies/ha.

### Discusión y Conclusiones

En este estudio se expone un método para estimar las tasas de aprovechamiento máximo sostenible y las distribuciones diamétricas estables de tres calidades de masas irregulares de *Pinus nigra* en el Sistema Ibérico, a lo largo de un período de 180 años, con intervalos de proyección de 10 años.

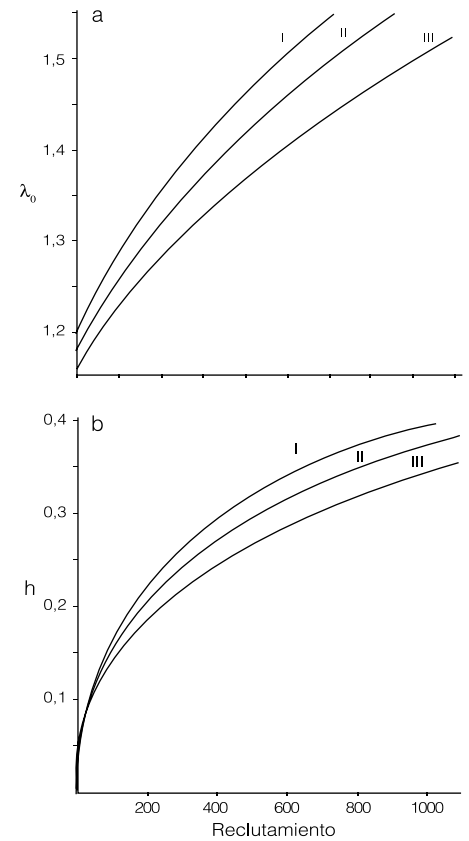


Figura 2. Autovvalor dominante  $\lambda_0$  (a) y tasa de extracción sostenible  $h$  (b) en función del reclutamiento, para cada calidad I a III y  $G = 25$ m<sup>2</sup>·ha<sup>-1</sup>

Dado que no se disponía de un censo detallado de las parcelas de estudio, que permitiera conocer las distribuciones de los diámetros dentro de cada clase diamétrica, así como su evolución temporal a 10 años, el método propuesto para el cálculo de las probabilidades de transición está basado en: a) una aproximación por esplines cúbicos a las tres curvas de crecimiento diamétrico calculadas mediante análisis de regresión por Gómez Loranca (1996); y b) la asunción de distribuciones de probabilidad uniformes (rectangulares) para los diámetros de los árboles dentro de cada clase. Es sabido que la distribución uniforme es especialmente útil para muestreos partiendo de distribuciones arbitrarias, siendo ampliamente aplicada a distribuciones de masas arbóreas (Pielou, 1969).

Los resultados obtenidos para  $\lambda_0$ , que están en el rango 1,2079-1,6690 para reclutamientos comprendidos entre 200 y 840pies/ha, están dentro de los intervalos correspondientes a otras especies arbóreas. En efecto, en Zuidema (2000) y en Ramula y Lehtilä (2005) se resumen las principales características de modelos matriciales correspondientes a 35 especies leñosas en el primer caso y a 37 especies vegetales (13 de ellas árboles) en el segundo. El rango de variación para  $\lambda_0$  es de 0,977 a 1,589 en el primer estudio, y de 0,826 a 2,334 en el segundo. Aun-

TABLE III  
ALGUNOS VALORES NUMÉRICOS PARA  $\lambda_0$ , H  
Y LAS DISTRIBUCIONES DIAMÉTRICAS ESTABLES\*

		R= 200 pies/ha	R= 520 pies/ha	R= 840 pies/ha	
Calidad I	G= 20	$\lambda_0$	1,3203	1,5240	1,6690
		h	24,26%	34,38%	40,09%
		d.d.est.	(257, 160, 110, 67, 30 )	(529, 259, 133, 56, 15)	(745, 315, 137, 48, 10)
	G= 25	$\lambda_0$	1,2847	1,4676	1,5971
		h	22,16%	31,86%	37,39%
		d.d.est.	(269, 177, 129, 85, 43)	(561, 292, 161, 75, 23)	(796, 361, 170, 65, 16)
	G= 30	$\lambda_0$	1,2583	1,4259	1,5441
		h	20,53%	29,87%	35,24%
		d.d.est.	(279, 190, 145, 102, 57)	(588, 321, 187, 93, 31)	(838, 401, 201, 83, 22)
Calidad II	G= 20	$\lambda_0$	1,2913	1,4773	1,6107
		h	22,56%	32,31%	37,92%
		d.d.est.	(293, 180, 124, 63, 26)	(599, 285, 143, 50, 12)	(839, 343, 144, 41, 8)
	G= 25	$\lambda_0$	1,2591	1,4256	1,5444
		h	20,58%	29,85%	35,25%
		d.d.est.	(308, 200, 146, 81, 37)	(637, 324, 175, 67, 19)	(899, 395, 180, 57, 12)
	G= 30	$\lambda_0$	1,2352	1,3875	1,4958
		h	19,04%	27,93%	33,14%
		d.d.est.	(320, 216, 167, 98, 50)	(669, 357, 206, 85, 26)	(948, 441, 215, 73, 18)
Calidad III	G= 20	$\lambda_0$	1,2568	1,4199	1,5383
		h	20,43%	29,57%	34,99%
		d.d.est.	(355, 211, 134, 54, 24)	(716, 324, 147, 41, 11)	(995, 383, 144, 33, 7)
	G= 25	$\lambda_0$	1,2287	1,3744	1,4794
		h	18,61%	27,24%	32,40%
		d.d.est.	(374, 235, 161, 70, 34)	(764, 370, 182, 56, 17)	(1069, 444, 182, 46, 11)
	G= 30	$\lambda_0$	1,2079	1,3409	1,4363
		h	17,21%	25,42%	30,38%
		d.d.est.	(389, 256, 185, 86, 46)	(804, 411, 216, 71, 23)	(1131, 499, 220, 59, 15)

\* d.d.est. en pies/ha.

que dentro de estos intervalos, los resultados obtenidos para  $\lambda_0$  se esperaban ligeramente altos, debido a que las mortandades naturales figuran en el modelo absorbidas por la tasa de aprovechamiento h, no estando incorporadas a los coeficientes de la matriz A.

Estas mortandades naturales, que dependen principalmente de la edad del árbol, de la competencia intraespecífica entre árboles que mantienen estrecha proximidad espacial (Antonovics y Levin, 1980), de características de las masas y prácticas de silvicultura, han sido estimadas en el intervalo 0-10% (media 9%, desviación típica de 0,1) para cada período de 5 años, en un muestreo basado en 6 parcelas experimentales de *P. nigra* en Cataluña, España, con área media de 900m<sup>2</sup>, área basimétrica media de 24,5m<sup>2</sup>·ha<sup>-1</sup>, altura media de 11,5m y altura dominante media de 13,4m, inventariadas cada 5 años durante un período de 36 años (Palahí y Grau, 2003). Así, se pueden obtener tasas de aprovechamiento “netas” restando estas mortandades naturales de las tasas de aprovechamiento “sostenibles/estables” antes calculadas.

En cuanto a la amplitud de las clases diamétricas adoptada (d= 10cm), se ha visto para este modelo en López Torres *et al.* (2008) que la mínima sensibilidad del autovector dominante de la matriz de proyección

respecto a la amplitud de las clases diamétricas ( $\partial\lambda_0/\partial d$ ) y los valores más conservadores de  $\lambda_0$  y h, se obtienen para el mínimo valor de d (compatible con las hipótesis del modelo, en particular con la asunción de que los “saltos” sobre más de una clase diamétrica en cada proyección, no son posibles). No obstante, dado que, en general, para especies arbóreas de crecimiento lento, tanto dicho autovector dominante como la correspondiente distribución diamétrica estable se ven poco influenciados por ligeras o incluso moderadas variaciones en dicha amplitud (Ramula y Lehtilä, 2005; Zuidema, 2006; López Torres *et al.*, 2008), en el modelo se han considerado cinco clases diamétricas de amplitud d= 10cm.

En cuanto a las distribuciones diamétricas estables, han sido obtenidas y representadas en las Figuras 3a, b y c en relación al reclutamiento para un área basimétrica de 25m<sup>2</sup>·ha<sup>-1</sup> (valores numéricos redondeados para G= 20, 25 y 30m<sup>2</sup>·ha<sup>-1</sup> y reclutamientos R= 200, 520 y 840pies/ha se presentan en la Tabla III). En dichas figuras se puede apreciar que todas estas distribuciones presentan forma de J-invertida, pero no son semilogarítmicas. El número de pies/ha es una función que crece al crecer el reclutamiento en el caso

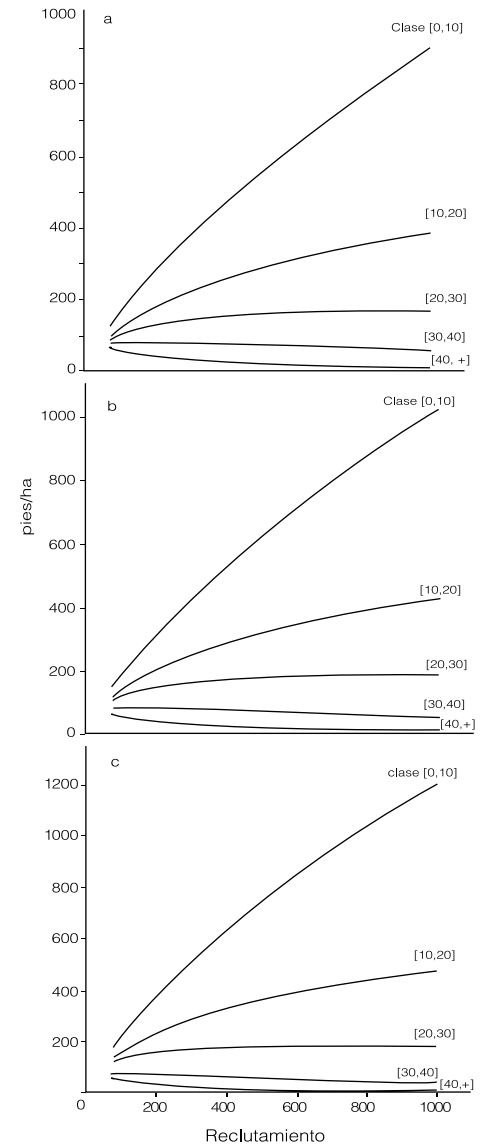


Figura 3. Distribución estable (pies/ha) para las calidades I (a), II (b) y III (c), y G= 25m<sup>2</sup>·ha<sup>-1</sup>.

de las dos primeras clases, y una función que decrece al crecer el reclutamiento en el de las dos últimas.

Como se puede deducir de lo visto, este modelo fácilmente podría ser adaptado a situaciones diferentes, como variaciones en el área basimétrica, en el número de clases, otras estrategias de gestión, etc. También podría ser aplicable a múltiples escenarios, en particular a bosques sudamericanos con una o pocas especies dominantes (p.e., los quebrachales y algarrobales de la región Chaqueña de Argentina).

## REFERENCIAS

- Antonovics J, Levin DA (1980) The ecological and genetic consequences of density-dependent regulation in plants. *Annu. Rev. Ecol. Syst.* 11: 411-452.
- Cancino J, von Gadow K (2002) Stem number guide curves for uneven-aged forests - development and limitations. En von Gadow K,

- Nagel J, Saborowsky J (Eds.) *Continuous Cover Forestry*. Kluwer. Dordrecht, Alemania. pp.163-174.
- Caswell H (2001) *Matrix population models: Construction, Analysis, and Interpretation*. 2ª ed. Sinauer. Sunderland, MA, EEUU. 722 pp.
- Cohen JE (1979) Ergodic theorems in demography. *Bull. Am. Math. Soc.* 1: 275-295.
- De Liocourt F (1898) De l'aménagement des Sapinieres. *Bull. Soc. Forest. Franche-Comte Territ. Belfort* 4: 396-409, 645-647.
- Frobenius G (1908) Über Matrizen aus positiven Elementen. S.-B. Preuss. Akad. Wiss. Berlin, Germany.
- Gómez Loranca JA (1996) *Pinus nigra Arn. en el Sistema Ibérico. Tablas de crecimiento y producción*. Monografía N° 93. INIA. Madrid, España. 106 pp.
- Grande MA, García Abril A, Rodríguez Solano R (Eds.) (2004) *Gestión Forestal Sostenible de los Pinares de Pinus nigra Arn. Alto Tajo, Serranía de Cuenca, Sierras de Cazorla y Segura*. Editorial FUCOVASA. Madrid, España. 351 pp.
- ICONA (1995) *Segundo Inventario Forestal Nacional 1986-1995*. España Instituto para la Conservación de la Naturaleza. Ministerio de Agricultura, Pesca y Alimentación. Madrid, España.
- Leslie PH (1945) On the use of matrices in certain population mathematics. *Biometrika* 33: 183-212.
- Lefkovich LP (1965) The study of population growth in organisms grouped by stages. *Biometrics* 21: 1-18.
- López I, Ortuño SF, Martín AJ, Fullana C (2007) Estimating the sustainable harvesting and the stable diameter distribution of European beech with projection matrix models. *Ann. For. Sci.* 64: 593-599.
- López I, Fullana C, Ortuño SF, Martín AJ (2008) Choosing *Fagus sylvatica* L. matrix model dimension by sensitivity analysis of the population growth rate with respect to the width of the diameter classes. *Ecol. Model.*
- Maple (2007) *Maple*. Versión 11.0. Maplesoft. Ontario, Canadá.
- Minckler LS, Woerheide JD (1965) Reproduction of hardwoods 10 years after cutting as affected by site and opening size. *J. Forest.* 63: 103-107.
- Mirov NT (1967) *The genus Pinus*. Arnold. Nueva Cork, NY, EEUU. 602 pp.
- Monge Reyes A (1997) *Selvicultura y Regeneración de Pinus Nigra en las Sierras Béticas*. Tesis. Universidad Politécnica de Madrid. España.
- Palahí M, Grau JM (2003) Preliminary site index model and individual-tree growth and mortality models for black pine (*Pinus nigra* Arn.) in Catalonia (Spain). *Inv. Agr. Recur. For.* 12: 137-148.
- Perron O (1907) Zur Theorie der Matrizen. *Math. Ann.* 64: 248-263.
- Pielou EC (1969) *An Introduction to Mathematical Ecology*. Wiley. Nueva York, NY, EEUU. 286 pp.
- Ramula S, Lehtilä K (2005) Matrix dimensionality in demographic analyses of plants: when to use smaller matrices? *Oikos* 111: 563-573.
- Schütz JP (1975) Dynamique et conditions d'équilibre des peuplements jardinées sur les stations de la hêtraie à sapin. *Schw. Z. Forstwesen* 126: 637-671.
- Schütz JP (1989) *Le regime du Jardinage*. Eidgenössische Technische Hochschule. Zürich, Suiza. 55 pp.
- Schütz JP (2006) Demographic sustainability of beech plenter forests. *Ann. For. Sci.* 63: 93-100.
- Serrada R, Domínguez Lerena S, Sánchez Resco MI, Ruiz Ortiz J (1994) El problema de la regeneración natural de *Pinus nigra* Arn. *Rev. Montes* 36: 52-57.
- Sterba H (2004) Equilibrium Curves and Growth Models to Deal with Forests in Transition to Uneven-Aged Structure - Application in Two Sample Stands. *Silva Fennica* 38: 413-423.
- Susmel L (1956) Leggi di variazione dei parametric della foresta disetanea normale. *L'Italia Forest. Mont.* XI(3).
- Tiscar PA (2004) *Estructura, regeneración y crecimiento del Pinus nigra en el área de la reserva Navahonda-Guadahornillos (Sierra de Cazorla, Jaen)*. Tesis. Universidad Politécnica de Madrid. España.
- Van Mantgem PJ, Stephenson NT (2005) The accuracy of matrix population model projections for coniferous trees in the Sierra Nevada, California. *J. Ecol.* 93: 737-747.
- Zuidema PA (2000) Demography of exploited tree species in the Bolivian Amazon. Scientific Series N° 2. Programa Manejo de Bosque de la Amazonia Boliviana. Riberalta, Bolivia.
- Zuidema PA (2006) What dimension to use for matrix models of trees? Recommendations based on a validation of age estimate by tree ring analysis. En Chien PD (Ed.) *Demography of Threatened Tree Species in Vietnam* (Cap. 5). Utrecht University. Utrecht, Holanda.

## ESTIMATION OF THE MAXIMUM SUSTAINABLE YIELD AND STABLE DIAMETRIC DISTRIBUTION OF IRREGULAR MASSES OF *Pinus nigra* THROUGH MATRIX MODELS

Ignacio López Torres, Sigfredo Francisco Ortuño Pérez, Ángel Julián Martín Fernández and Carmen Fullana Belda

### SUMMARY

A matrix model is presented for the projection in time and maximal profiting that ensures sustainability and stability of diameter distributions of three qualities of *Pinus nigra*. Considering projection periods of 10 years, trunks were grouped in five diameter classes: 0-10, 10-20, 20-30, 30-40 and >40cm. Transition probabilities were calculated adjusting diameter growth curves by cubic approximations and assuming uniform diameter distributions within each class. A condition is proposed for the sustainable management of the tree mass that permits to reach

and maintain in time a stable diameter distribution. The results indicate that, in order to ensure population sustainability/stability, for each projection time interval the maximal extraction rate should be between 17.21 and 40.09%, depending on quality level, for recruitments between 200 and 840 trunks/ha and total sectional areas of 20 to 30m<sup>2</sup>·ha<sup>-1</sup>. Finally, for each quality level the stable diameter distributions in relation to recruitment for total sectional areas of 20, 25 and 30m<sup>2</sup>·ha<sup>-1</sup> were obtained.

## ESTIMAÇÃO DO APROVEITAMENTO MÁXIMO SUSTENTÁVEL E DISTRIBUIÇÃO DIAMÉTRICA ESTÁVEL DE MASSAS IRREGULARES DE *Pinus nigra* MEDIANTE MODELOS MATRICIAIS

Ignacio López Torres, Sigfredo Francisco Ortuño Pérez, Ángel Julián Martín Fernández e Carmen Fullana Belda

### RESUMO

Apresenta-se um modelo matricial de projeção para quantificar as taxas máximas de aproveitamento que assegurem a sustentabilidade e a estabilidade das distribuições diamétricas de três qualidades de *Pinus nigra*. Considerando períodos de projeção de 10 anos, os pés foram agrupados em cinco classes diamétricas: 0-10, 10-20, 20-30, 30-40 e >40cm. As probabilidades de transição se calcularam ajustando uma aproximação por splines cúbicos às curvas de crescimento diamétrico e assumindo distribuições uniformes para os diâmetros dentro de cada classe. Sugere-se uma condição para a gestão sustentável da massa,

que, além disso, permite alcançar e manter no tempo uma distribuição diamétrica estável. Os resultados obtidos indicam que, para assegurar a sustentabilidade/estabilidade da população, e para cada intervalo de projeção, as taxas máximas de extração deveriam estar entre 17,21% e 40,09%, dependendo do nível de qualidade, para recrutamentos compreendidos entre 200 e 840 pés/ha e áreas basimétricas compreendidas entre 20 e 30m<sup>2</sup>·ha<sup>-1</sup>. Finalmente, se obtêm para cada nível de qualidade as distribuições diamétricas estáveis em relação ao recrutamento para áreas basimétricas de 20, 25 e 30m<sup>2</sup>·ha<sup>-1</sup>.